凝集現象に於けるスケーリング理論(基研短期研究会『天体現象と非線形・非平衡物理』,研究会報告)

早川, 尚男

云われれば(1)(近似的な)保存量及び(2)対称性の自発的破れに結びついた自由度(domain wallの位置等)がある時にはこれらは立派なslow variablesであるが，それ以外では個々に探すしかない(例えば第3積分等)。これには経験を積むしかない。

最後にふれたOstward ripeningとは一様に混った混合物(合金，溶液等)が2つの異った組成をもつ相に分離する時におこる過程の一つで研究会での伊東氏の話とも関連がある。もし元々片方の成分の量が多い時には他方の成分をもった相は球状に相分離をおこす。この析出物の成長過程や大きさの統計が重要な問題になっている。この理論の基礎方程式には成長及び縮少しつつある球の間のクーロン的なダイナミックな相互作用が入ってくる。この点で重力系と似ている様であるが実際の取り扱いはかなりちがう。伊東氏が云われる様にこれらの問題の間に何等かのアナロジーがあれば大変興味深い。

References

1) 川崎恭治 日本物理学会誌 32 No.12 (1983) 919; 物性研究 43 No.5 (1985) 181; パリティ 2 No.1 (1987) 1; 第1回湯川シンポジウム(西ノ宮, Nov. 1986)(to be published by springer)
2) J. D. Gunton, M. San Miguel, and P. S. Sahni ; in Phase Transitions and Critical Phenomena Vol. 8, C. Domb and J. L. Lebowitz, eds. (Academic Press, New York, 1983); K. Binder, Rep. Prog. Phys 50 (1987) 783
3) K. Kawasaki, in the Proceedings of the 19th Yamada Conference on Ordering and Organization in Ionic Solutions (Kyoto, Nov, 1987), N. Ise and I. Sogami, eds. (World Scientific, 1988)
4) D. Demus and L. Richter, Textures of Liquid Crystals Verlag Chemie (Weinheim, 1978)

凝集現象に於けるスケーリング理論

神戸大・理 早 川 尚 男

凝集は，対象を天体現象に限定しても星間塵，小惑星の形成，星の生成，銀河形成等各スケールに重要な役割を果している。ここでは自己重力が厳しく効かない星間塵形成を例に取り，其処で現われるフラクタル性，スケーリング則に就て論じる。

最も簡単な併合成長過程は次の様な描像に基づくであろう。十分にthermalizeされた系を考える。AとBの2種の粒子の併合確率は衝突確率に比例するとすると

$$K_{AB} \propto C_{AB} \sim \langle v_{AB} \rangle \sigma_{AB} \tag{1}$$

但しK_{AB}，C_{AB}は各併合，衝突確率，v_{AB}はAB間の相対速度，σ_{AB}は衝突断面積である。thermalize

されていて球形粒子であれば明らかに

$$K_{AB} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{\mu_{AB}}}\,\pi\,(a_A + a_B)^2$$

$$\propto (m_A^{-1} + m_B^{-1})^{\frac{1}{2}} (m_B^{\frac{1}{3}} + m_A^{\frac{1}{3}})^2 \tag{2}$$

と評価できる。但し，μ_{AB}，m_A，m_B は各換算，A及びBの質量である。こうした系がある初期条件の下に不可逆的に凝集が進むとすれば次の様な方程式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} C_k(t) = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} K_{ij} C_i C_j - C_k \sum_{j=1}^{\infty} K_{kj} C_j \tag{3}$$

但し，C_k は基本単位k個から成るクラスターの濃度である。この方程式は，コロイドの凝集などでも御馴染みで，一見して次のことが分るだろう。(i)空間的効果を無視した非線形方程式 (ii)不可逆方程式であるので十分時間が経てば trivial な解しかない。(i) の妥当性は本論後半で述べるとして，(ii)に関連して，(2)と(3)を組み合わせた方程式を数値的に追った仕事が存在するが，星間塵のモデルとしては，サイズ分布が狭い peak を持ちすぎて，観測事実と合わない。[2)]

そこで筆者は，単純な拡張として粒子，殊に小さい粒子が系に絶えず供給されている場合を考えた。この場合，一種の（逆）カスケード過程として併合過程を解釈でき，粒子の sinkを考えない理想的な系では系がself-similarな構造をもっていることが期待される。

実際，(3)式に粒子の source を考えると定常解が存在する（式(4)をみよ）

$$0 = \frac{1}{2} \sum_{i+j=k} K_{ij} C_i C_j - C_k \sum_{j=k}^{\infty} K_{kj} C_j + h \cdot \delta_{k1} \tag{4}$$

ので，解の性質を見ることができる。これでも(2)をそのまま代入すると難しすぎるので

$$K_{ij} \sim K(i^{-\frac{1}{2}} j^{\frac{2}{3}}) \qquad (j \gg i) \tag{5}$$

と云う性質に着目し，

$$K_{ij} = K(i^{-\frac{1}{2}} j^{\frac{2}{3}} + i^{\frac{2}{3}} j^{-\frac{1}{2}}) \tag{6}$$

を(4)に代入した方程式を解いてみた。[2)] すると解は

$$C_k \propto h^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{19}{12}} \tag{7}$$

と云う巾分布の解が得られる。サイズ分布が巾分布になることはスケーリングの成立を意味し，他に諸量に対してもフラクタル的特性を備えていると期待させるに足る結果である。尚式(7)は，大気エアロゾルの粒径分布に対しては良い近似を与えるが，星間塵の観測事実

大きい grain

$$n(r)\,dr \sim r^{-3.5}\,dr \tag{8a}$$

小さい grain (disk状)

$$n(r)\,dr \sim r^{-4}dr \tag{8b}$$

には合わない。但し $n(r)\,dr$ は粒径 (r, $r+dr$) にある星間塵の個数分布である。そこで筆者は今迄，無批判に thermalize しているとしていた議論に再検討を加え grain の構成要素が C や Si なら未だ thermalize していないと時間評価をし直した。[3] 同時に通常言われる様な accretion による grain の生成と十分比較に足え得る頻度で coagulation が生じることも示した。その様な場合，特に星間塵の形成が主として衝撃波の存在するようなところで生じることを考慮すると，相対速度は換算質量に独立と近似できて結局

$$C_k \sim k^{-\frac{11}{6}} \quad (\text{球状grain})$$

$$\Longleftrightarrow n(r) \sim r^{-3.5} \tag{9a}$$

$$C_k \sim k^{-2}$$

$$\Longleftrightarrow n(r) \sim r^{-4} \quad (\text{disk grain}) \tag{9b}$$

が得られることを示した。これは観測結果(8)を説明するに足る結果である。

一方，今迄の取り扱いは所謂平均場近似に基づいたものであったので，その妥当性を check する必要がある。そこで，筆者は最近，[4] くりこみ群を用いた手法でその妥当性を議論し，同時にサイズ分布以外のスケーリングに就ても議論し，相互の関連を導くことに成功した。

容易に想像のつくことであるが，方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}C_k = \frac{1}{2}\sum_{i+j=k}K_{ij}C_iC_j - C_k\sum_j K_{kj}C_j + h\delta_{k1} \tag{10}$$

は source の強さ h に対するスケーリングの性質をもつ。即ち

$$C_k = h^{\frac{1}{2}}\widetilde{C}_k(\widetilde{t}) \tag{11a}$$

$$\widetilde{t} = h^{\frac{1}{2}}t \tag{11b}$$

とおいても(10)式は同じ形 (但し $h \to 1$) に書き下すことが可能である。このことは(7)式で定常解が $h^{\frac{1}{2}}$ に比例することからも分る。この性質は臨界現象で系の特徴的スケールが消失して，スケーリングが成立することを想起させる。するとくりこみ群の適用が可能で，平均場近似(10)の妥当なのは

$$d_c = 2 \tag{12}$$

と云う臨界次元より大きい場合に限られることが分る。[4] 従って通常の3次元空間では(10)は正しく，(9)式の様に観測事実に合う結果を得ることができる。一方，2次元より次元が低い場合は，最早，(10)では系を記述できない。そのときは，次の様な簡単な場合について解析することに成功した。つまり凝集過程

$$X_i + X_j \underset{K}{\rightarrow} X_{i+j} \tag{13}$$

の様にサイズに依らないで進行する場合である。これは星間塵の形成等の問題には適さないが，星の生成等の様にクラスターがBrown運動をしながら合体する過程にはよい近似を与える[5]。そのとき，クラスターの個数 n(t) に対し

$$n(t)=h^{\frac{1}{\delta}}f\left(h^{1-\frac{1}{\delta}}t\right) \tag{14}$$

とスケールされることを見い出した。但しこのとき f はスケーリング関数で $f(x)\to 1\ (x\to\infty)$ を充す。この場合の指数 δ の値は次の様に与えられる。

$$\delta=\begin{cases}\dfrac{d+2}{d} & (d<2) \quad (15\mathrm{a})\\ 2 & (d>2) \quad (15\mathrm{b})\end{cases}$$

勿論，臨界の $d=2$ では logarithmic correction がつく。(15a) は次元解析でも求まるが，今回，くりこみ群によって次元解析が正しいことを証明した[4]。このことは臨界現象を考えると極めて特異なことである。また筆者はサイズ分布も(14)式とラプラス変換で結ばれることを示し，結局

$$C_N\simeq N^{-\tau}g\left(N^{-(1-\frac{1}{\delta})}t\right) \tag{16}$$

で与えられることを示した。このとき τ は

$$\tau=1+\frac{1}{\delta} \tag{17}$$

を充す。この結果は星の生成でのサイズ分布[5]を包含したものである。

また同時に筆者の行った解析に於て[4]，free action が massless form を持つことを示し，不可逆凝集でのスケーリングの出自を見い出すことに成功した。即ち，不可逆凝集は常に相関距離の発散している massless の点でのみ起こり，フラクタル性を備えていること。しかし粒子の注入がなければ定常状態は形成されず，フラクタル性は観測されにくいこと。従って現在観測されている凝集によるフラクタル性は source を伴って初めて説明が可能であることなどがわかった。

平衡系では臨界現象はあるパラメータを調整し，その直上にならなければ生じないものが，不可逆凝集系では臨界的な振舞の他為し得ないことは特異であると同時に興味深い。自然界は，殊に宇宙は，フラクタルに充ち溢れているといってよいが，不可逆凝集がフラクタル的性質を備えていることがこのことの成因のひとつとなっていることは間違いないと思われる。

参考文献

1) C. Hayashi and Y. Nakagawa, Prog. Theor. Phys. **54**, (1975), 93.

2) H. Hayakawa, J. Phys. **A20**, (1987), L 801.

3) H. Hayakawa and S. Hayakawa, Submitted to Publ. Astron. Soc. Jpn.

4) H. Hayakawa, Submitted to J. Phys. **A**

5) G. B. Field and W. C. Saslaw, Astrophys. J. **142**, (1965), 568.